Capitolul 4

PLANUL IN GEOMETRIA DESCRIPTIVĂ

Dacă privim planul ca element geometric bidimensional şi infinit, reprezentarea lui prin proiecţii nu este relevantă. Trebuie găsită o altă modalitate de reprezentare a planului, care să înlăture acest impediment. Un plan oarecare, notat **[P]**, se intersectează cu planele de proiecţie după trei drepte care se numesc *urmele planului* şi care sunt nişte drepte particulare, tocmai pentru că aparţin şi planelor de proiecţie (fig. 4.1):

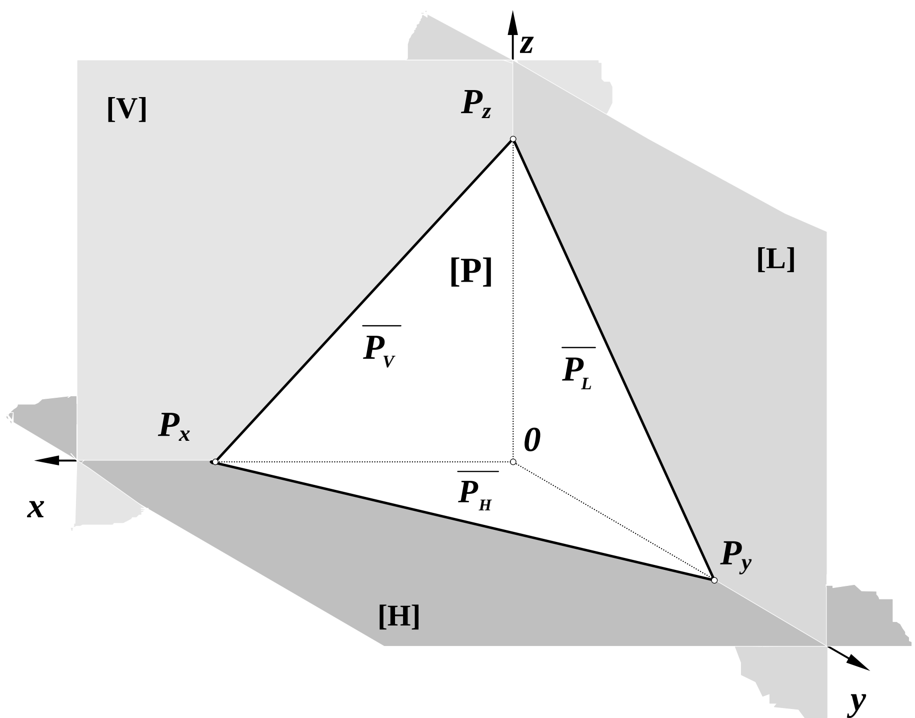


Fig. 4.1

unde: **[P] ∩ [H]** = $\overline{P_H} \equiv \overline{p_h}$ - urmă orizontală;

[P] ∩ [V] = $\overline{P_V} \equiv \overline{p_v'}$ - urmă verticală; (4.1)

[P] ∩ [L] = $\overline{P_L} \equiv \overline{p_l''}$ - urmă laterală;

Dreptele “urme” au ca orice dreaptă trei proiecții, dintre care, câte una este identică cu dreapta din spațiu (4.1), iar celelalte două se găsesc pe axele sistemului de proiecție, după cum urmează:

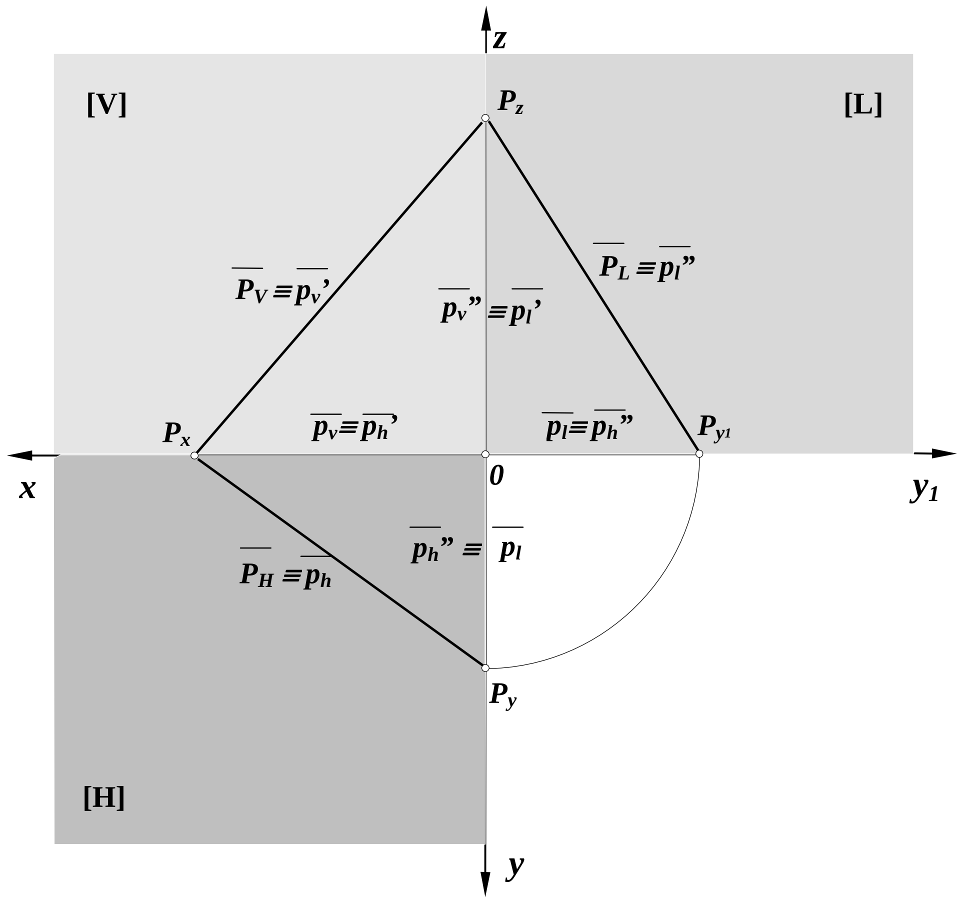


Fig. 4.2

4.1 DREAPTĂ ŞI PUNCT SITUATE IN PLAN

O dreaptă situată într-un plan, va avea urmele pe urmele de acelaşi nume ale planului, iar un punct va aparține unui plan dacă aparține unei drepte a planului (proiecțiile sale aparțin proiecțiilor de acelaşi nume ale unei drepte a planului), (vezi fig. 4.3 şi 4.4):

$$\overline{D} \subset [P] \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} h \in \overline{p_h} \\ v' \in \overline{p_v}' \end{cases} \qquad (4.2)$$

şi $$M \in [P] \;\Leftrightarrow\; M \in \overline{D} \subset [P] \qquad (4.3)$$

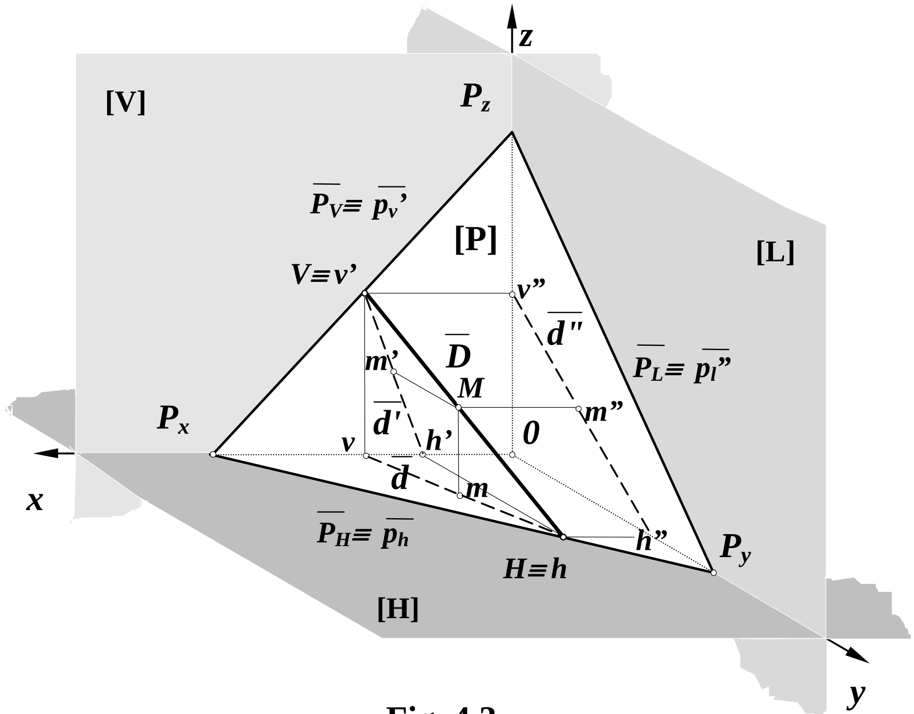

z
[V]
P_z
$\overline{P_V} \equiv \overline{p_v}'$
[P]
[L]
$V \equiv v'$
v”
$\overline{d}''$
$\overline{D}$
m’
M
$\overline{P_L} \equiv \overline{p_l}''$
$\overline{d}'$
m”
P_x
v
h’
0
x
$\overline{d}$
m
$\overline{P_H} \equiv \overline{p_h}$
h”
P_y
$H \equiv h$
[H]
y

Fig. 4.3

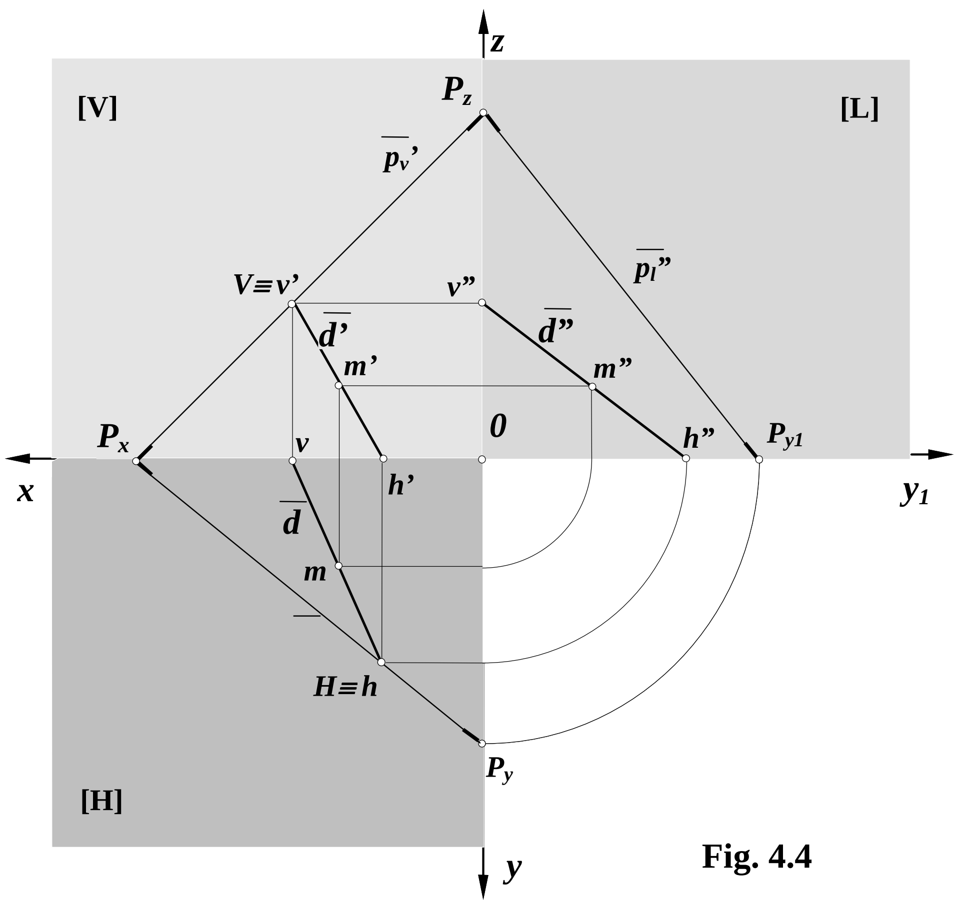

z
P_z
[V]
[L]
$\overline{p_v}'$
$\overline{p_l}''$
$V \equiv v'$
v”
$\overline{d}'$
$\overline{d}''$
m’
m”
0
P_x
v
h”
P_{y1}
x
h’
y_1
$\overline{d}$
m
$H \equiv h$
P_y
[H]
y

Fig. 4.4

4.2 MODALITĂȚI DE DEFINIRE A PLANULUI

Este ştiut din geometria în spațiu că un plan este definit prin:

- două drepte paralele;
- două drepte concurente;
- o dreaptă şi un punct exterior ei (care se reduce la unul din cazurile anterioare);
- trei puncte necoliniare (care se reduce la unul din cazurile anterioare).

Aceste modalități de definire ale planului se regăsesc şi în geometria descriptivă, în plus, apar nişte cazuri specifice şi anume:

- trei puncte aparținând urmelor unui plan;
- o "linie de cea mai mare pantă" a planului față de planul orizontal de proiecție;
- o "linie de cea mai mare pantă" a planului față de planul vertical de proiecție.

Linia de cea mai mare pantă a unui plan este o dreaptă ce aparține planului şi formează unghiul cel mai mare cu unul din planele de proiecție şi anume cu cel față de care este definită ca linie de cea mai mare pantă".

In studiul planului, când epura se complică şi se aglomerează foarte mult, reprezentarea se poate face pe toate cele trei plane de proiecție, dar şi numai pe două plane de proiecție, când proiecțiile laterale ale elementelor reprezentate nu aduc informații unice, definitorii.

4.2.1 Planul definit de două drepte paralele, se construieşte pe baza relațiilor (4.2) de apartenență a dreptei la un plan, determinând mai întâi urmele $\boldsymbol{H_i}$, respectiv $\boldsymbol{V_i}$, ale dreptelor paralele şi unind între ele proiecțiile de acelaşi nume ale urmelor dreptelor (fig. 4.5). Urmele planului astfel obținute trebuie să fie concurente pe axa $\overline{0x}$, în $\boldsymbol{P_x}$:

$$\left.\begin{array}{l} \overline{D}\cap[H]=H_1 \quad dar \quad \overline{D}\subset[P] \;\Rightarrow\; h_1\in\overline{p_h} \\ \overline{\Delta}\cap[H]=H_2 \quad dar \quad \overline{\Delta}\subset[P] \;\Rightarrow\; h_2\in\overline{p_h} \end{array}\right\} \overline{h_1h_2}\subset\overline{p_h} \qquad (4.4)$$

$$\left.\begin{array}{l} \overline{D}\cap[V]=V_1 \quad dar \quad \overline{D}\subset[P] \;\Rightarrow\; v_1'\in\overline{p_v'} \\ \overline{\Delta}\cap[V]=V_2 \quad dar \quad \overline{\Delta}\subset[P] \;\Rightarrow\; v_2'\in\overline{p_v'} \end{array}\right\} \overline{v_1'v_2'}\subset\overline{p_v'} \qquad (4.5)$$

4.2.2 Planul definit de două drepte concurente, se construieşte pe baza relațiilor (4.2) de apartenență a dreptei la un plan. Determinând mai întâi urmele H_i, respectiv V_i **,** ale dreptelor concurente şi unind între ele proiecțiile de acelaşi nume ale urmelor dreptelor (fig. 4.6), se obțin urmele planului care trebuie să fie concurente pe axa $\overline{0x}$, în P_x:

$$\left.\begin{array}{l} \overline{D}\cap[H]=H_1 \quad dar \quad \overline{D}\subset[P] \;\Rightarrow\; h_1\in\overline{p_h} \\ \overline{\Delta}\cap[H]=H_2 \quad dar \quad \overline{\Delta}\subset[P] \;\Rightarrow\; h_2\in\overline{p_h} \end{array}\right\} \overline{h_1h_2}\subset\overline{p_h} \tag{4.4'}$$

$$\left.\begin{array}{l} \overline{D}\cap[V]=V_1 \quad dar \quad \overline{D}\subset[P] \;\Rightarrow\; v_1'\in\overline{p_v'} \\ \overline{\Delta}\cap[V]=V_2 \quad dar \quad \overline{\Delta}\subset[P] \;\Rightarrow\; v_2'\in\overline{p_v'} \end{array}\right\} \overline{v_1'v_2'}\subset\overline{p_v'} \tag{4.5'}$$

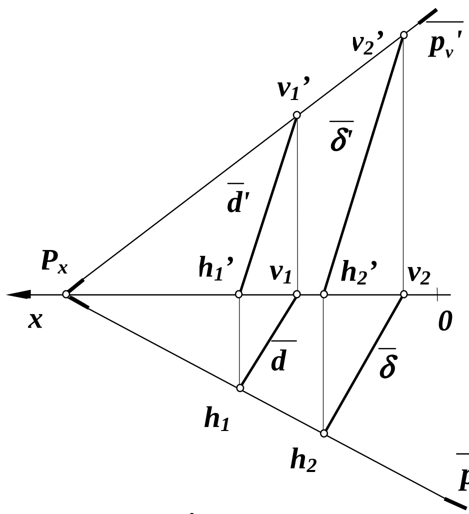


Fig. 4.5

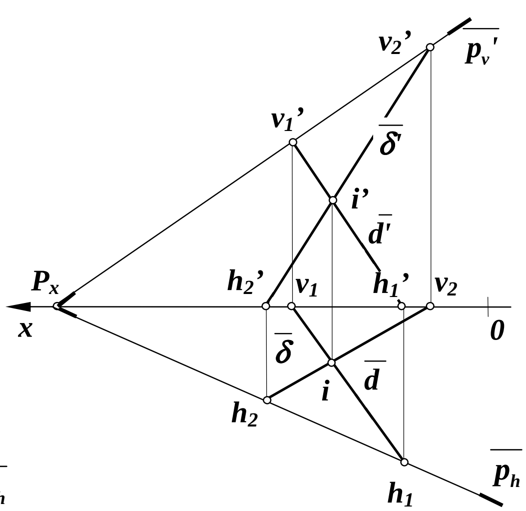


Fig. 4.6

4.2.3 Planul definit de trei puncte aparținând urmelor planului, este foarte des întâlnit în probleme. Punctele de definiție sunt de obicei P_x de pe axa $\overline{0x}$, un punct de pe urma orizontală, deci de forma H şi unul de pe urma verticală, de forma V (de exemplu punctele P_x, H_1 **ş**i V_1 din fig. 4.5 sau 4.6) . Construcția este banală:

$$\left.\begin{cases} \overline{P_x h}\subset\overline{p_h} \\ \overline{P_x v'}\subset\overline{p_v'} \end{cases}\right\}\Rightarrow [P] \tag{4.6}$$

4.2.4.1 Planul definit de o “linie de cea mai mare pantă” a planului față de planul [H] - *l.c.m.m.p.*/ [H]. Acest tip de dreaptă este perpendiculară pe urma orizontală a planului şi este capabilă singură să-l definească. In fig. 4.7 se poate identifica dreapta $\overline{D}$ ca l.c.m.m.p./**[*H*]** şi conform teoremei celor trei perpendiculare:

$$\overline{D}\perp\overline{P_H} \quad \wedge \quad \overline{v'v}\perp\overline{d}[H] \;\Rightarrow\; \overline{d}\perp\overline{p_h} \tag{4.7}$$

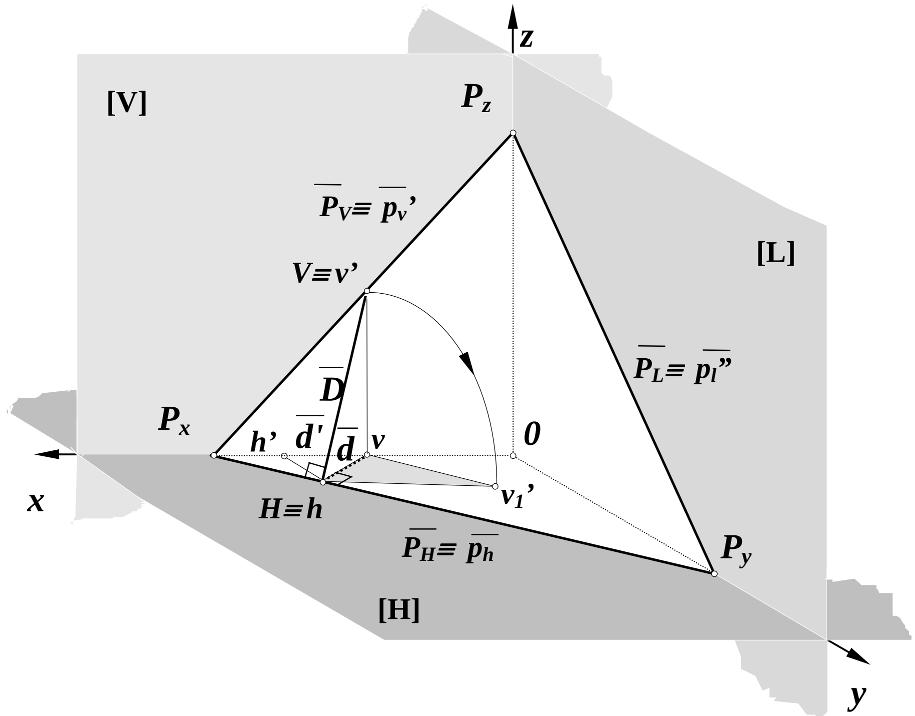


Fig. 4.7

Unghiul dintre planul **[P]** şi **[H]**, notat $\hat{\alpha}$, poate fi pus în evidență în triunghiul dreptunghic $\Delta v'v\,h$, format de dreapta $\overline{D}$, proiecția ei orizontală şi cota urmei sale verticale ***V*,** sau în triunghiul $\Delta v_1'v\,h$, obținut prin rabaterea primului, pe planul orizontal de proiecție (fig. 4.7 şi 4.8):

$$\hat{\alpha} = \angle v'\,hv = \angle v_1'\,hv \qquad (4.8)$$

Construcția planului **[P]** când se cunoaşte o l.c.m.m.mp./**[H]** a sa $\overline{D}$ (vezi fig. 4.8), foloseşte urmele dreptei $\overline{D}$ şi condiția de perpendicularitate a urmei orizontale a viitorului plan $\overline{p_h}$ față de proiecția orizontală $\overline{d}$ în ***h*** (urma orizontală a dreptei $\overline{D}$) . Se obține în acest fel P_x la intersecția cu $\overline{0x}$ şi apoi, prin ***v'***, urma verticală a planului, $\overline{p_v'}$.

4.2.4.2 Planul definit de o "linie de cea mai mare pantă" a planului față de planul [V] - *l.c.m.m.p.*/ [V]. Acest tip de dreaptă este perpendiculară pe urma verticală a planului şi este capabilă singură să-l definească. In fig. 4.9 se poate identifica dreapta $\overline{\Delta}$ ca l.c.m.m.p./**[*V*]** .

Unghiul dintre planul **[P]** şi **[V]**, notat $\hat{\beta}$, poate fi pus în evidență în triunghiul dreptunghic $\Delta h_1h'v'$, obținut prin rabatere pe planul vertical a triunghiului din spațiu format de dreaptă, proiecția ei verticală şi depărtarea punctului ***H*** (fig. 4.9):

$$\hat{\beta} = \angle h_1 v'\,h' \qquad (4.9)$$

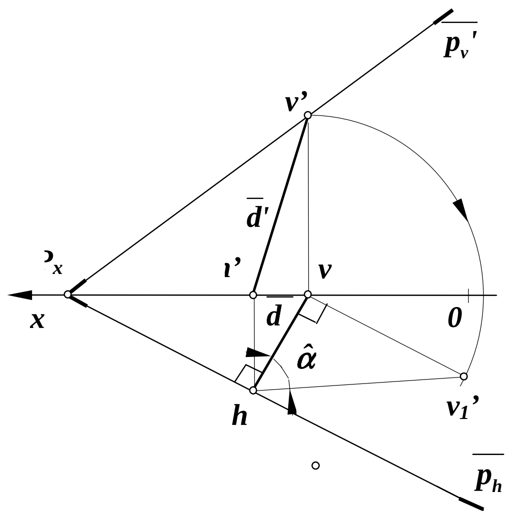


Fig. 4.8

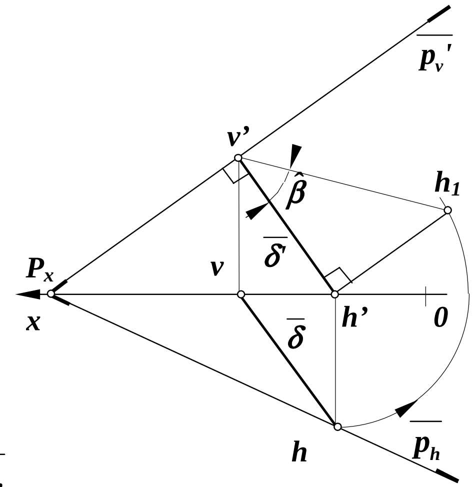


Fig. 4.9

Construcția planului **[P]** când se cunoaşte o l.c.m.m.mp./**[V]** a sa $\overline{\Delta}$ (vezi fig. 4.9), foloseşte urmele dreptei $\overline{\Delta}$ şi condiția de perpendicularitate a urmei verticale a viitorului plan $\overline{p_v}'$ față de proiecția verticală $\overline{\delta}'$ în ***v'*** (urma verticală a dreptei $\overline{\Delta}$) . Se obține în acest fel P_x la intersecția cu $\overline{0x}$ şi apoi, prin ***h***, urma orizontală a planului, $\overline{p_h}$.

4.3 DREPTE PARTICULARE ALE PLANULUI

Dreptele particulare care pot exista într-un plan oarecare, sunt cele din prima categorie de drepte particulare şi anume, cele paralele cu un plan de proiecție (de nivel, de front şi de profil). Cum proiecțiile în planul lateral sunt mai rar folosite, ne vom ocupa de primele două tipuri de drepte.

4.3.1 Dreptele de nivel ale unui plan, sunt drepte ale planului, paralele cu planul orizontal de proiecție. Ele se mai numesc şi orizontalele planului.

O dreaptă de nivel $\overline{N}$ (fig. 4.10) nu are urmă orizontală, iar apartenența ei la un plan **[P]**, obligă urmele dreptei să se găsească pe urmele de acelaşi nume ale planului; cum urma orizontală nu există, proiecția orizontală a dreptei va fi paralelă cu urma orizontală a planului.

Dar şi urma orizontală a planului este o dreaptă de nivel; concluzia este deci, că toate orizontalele unui plan $\overline{N_i}$, sunt paralele între ele:

$$\overline{N} \parallel [H] \wedge \overline{N} \subset [P] \Rightarrow \begin{cases} v' = \overline{n'} \cap \overline{p_v'} \\ h \nexists \Leftrightarrow \overline{n} \not\cap \overline{p_h} \Rightarrow \overline{n} \parallel \overline{p_h} \parallel \overline{n_i} \end{cases} \qquad (4.10)$$

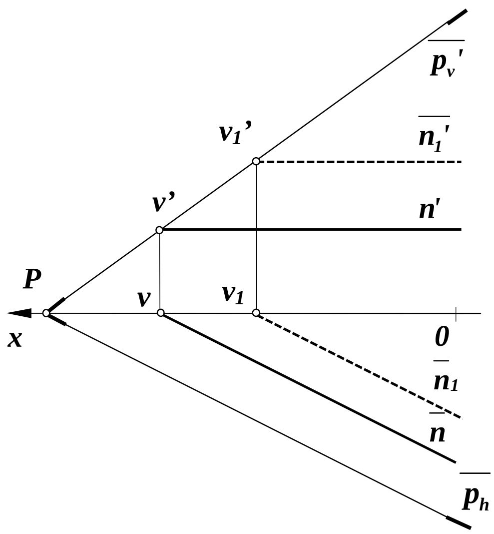


Fig. 4.10

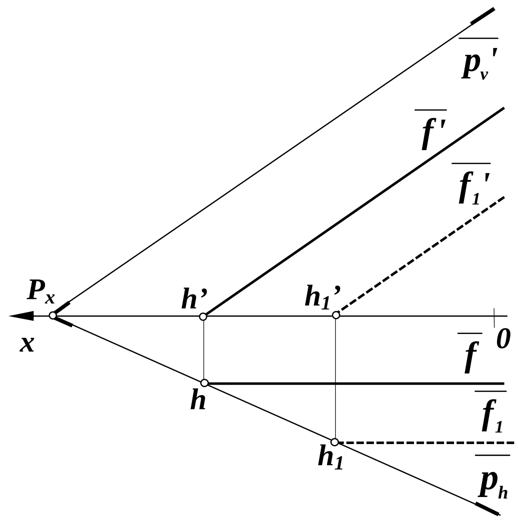


Fig. 4.11

4.3.2 Dreptele de front ale unui plan, sunt drepte ale planului, paralele cu planul vertical de proiecție.

O dreaptă de front $\overline{F}$ (fig. 4.11) nu are urmă verticală, iar apartenența ei la un plan **[P]**, obligă urmele dreptei să se găsească pe urmele de acelaşi nume ale planului; cum urma verticală nu există, proiecția verticală a dreptei va fi paralelă cu urma verticală a planului.

Dar şi urma verticală a planului este o dreaptă de front; în concluzie rezultă deci, că toate dreptele de front ale unui plan $\overline{F_i}$, sunt paralele între ele:

$$\overline{F} \parallel [V] \wedge \overline{F} \subset [P] \Rightarrow \begin{cases} h = \overline{f} \cap \overline{p_h} \\ v' \nexists \Leftrightarrow \overline{f'} \not\cap \overline{p_v'} \Rightarrow \overline{f'} \parallel \overline{p_v'} \parallel \overline{f_i'} \end{cases} \qquad (4.11)$$

4.4 POZIȚII PARTICULARE ALE UNUI PLAN

Ca şi dreptele, planele pot ocupa poziții particulare în raport cu planele de proiecție. Acestea se înscriu în două categorii:

- plane paralele cu planele de proiecție, deci perpendiculare pe celelalte două (grad dublu de particularitate);
- plane perpendiculare pe planele de proiecție .

4.4.1 Planul de nivel [N] este paralel cu planul orizontal de proiecție și în consecință, este perpendicular pe planul vertical și cel lateral de proiecție, față de care este un plan proiectant (tot ce conține planul, se proiectează pe urma respectivă a planului).

Un element geometric aparținând unui plan de nivel (segment de dreaptă, figură geometrică plană), se proiectează în adevărată mărime pe planul orizontal **[H]** (fig. 4.12) și complet deformat pe planul vertical **[V]** și pe planul lateral **[L]** (complet deformat înseamnă nu doar deformat ci și schimbarea categoriei geometrice, de la poligon la segment, triunghiul ΔABC având proiecția verticală $\overline{a'b'c'}$ și proiecția laterală $\overline{a''b''c''}$).

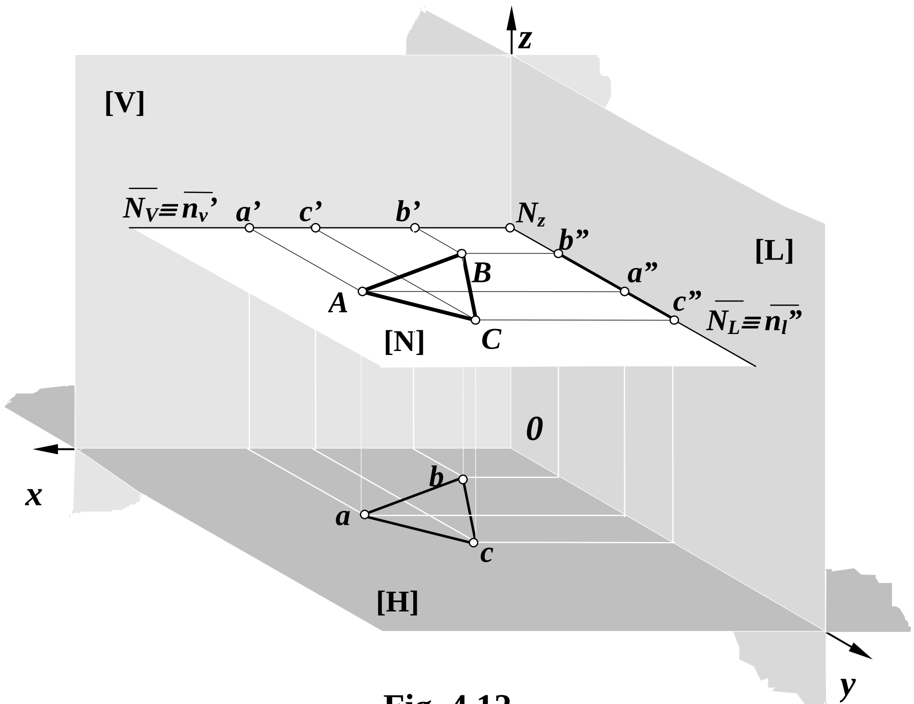
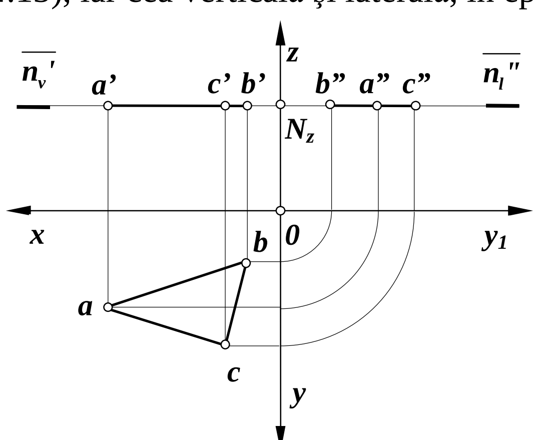


Fig. 4.12

Se remarcă faptul că planul de nivel nu are urmă orizontală (fig. 4.12 și 4.13), iar cea verticală și laterală, în epură sunt în prelungire (***z=const***).



$$\left.\begin{array}{l}[N] \parallel [H] \\ z = const\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\Delta abc = \Delta ABC \\ \overline{a'b'c'} \subset \overline{n_v'} \parallel \overline{0x} \\ \overline{a''b''c''} \subset \overline{n_l''} \parallel \overline{0y}\end{array}\right. \qquad (4.12)$$

Fig. 4.13

4.4.2 Planul de front [F] este paralel cu planul vertical de proiecție şi în consecință, este perpendicular pe planul orizontal şi cel lateral de proiecție, față de care este un plan proiectant.

Un element geometric aparținând unui plan de front (segment de dreaptă, figură geometrică plană), se proiectează în adevărata mărime pe planul vertical **[V]** (fig. 4.14) şi complet deformat pe planul orizontal **[H]** şi pe planul lateral **[L]**.

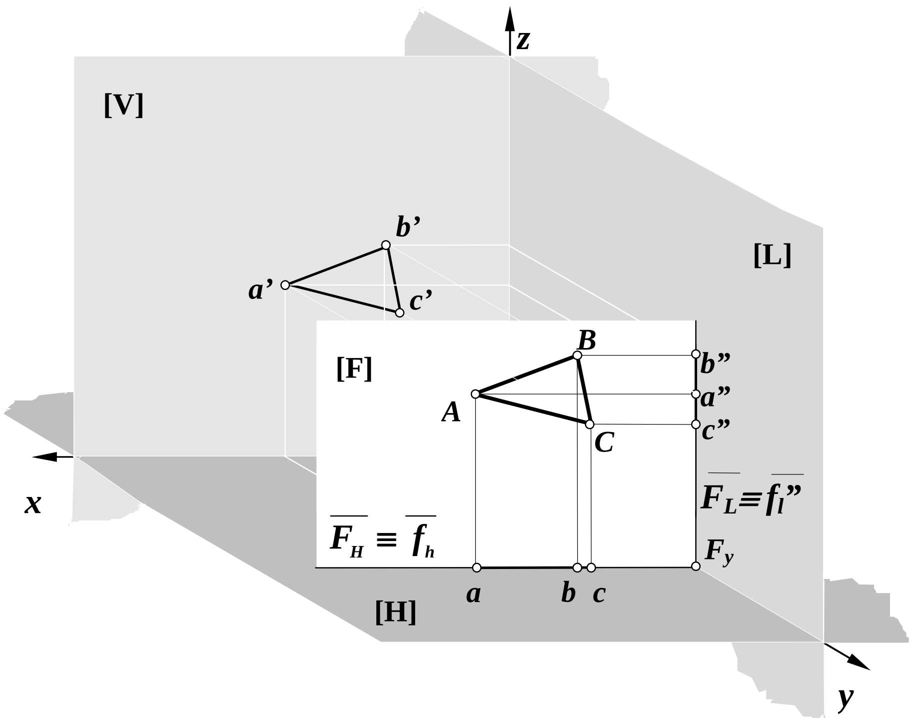
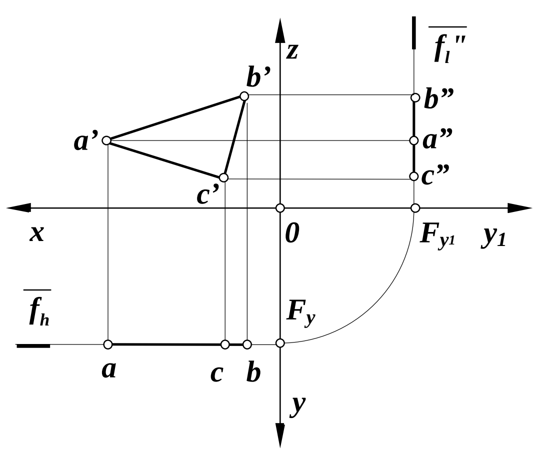


Fig. 4.14

Se remarcă faptul că planul de front nu are urmă verticală (fig. 4.14 şi 4.15), iar cea orizontală şi laterală, în epură sunt în prelungire (***y=const***).



$$\left.\begin{array}{l}[F]\,\|\,[V] \\ y = const\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\Delta a'b'c' = \Delta ABC \\ \overline{abc} \subset \overline{f_h}\,\|\,\overline{0x} \\ \overline{a''b''c''} \subset \overline{f_l''}\,\|\,\overline{0z}\end{array}\right. \qquad (4.13)$$

Fig. 4.15

4.4.3 Planul de profil [P] este paralel cu planul lateral de proiecție şi în consecință, este perpendicular pe planul vertical şi cel orizontal de proiecție, față de care este un plan proiectant.

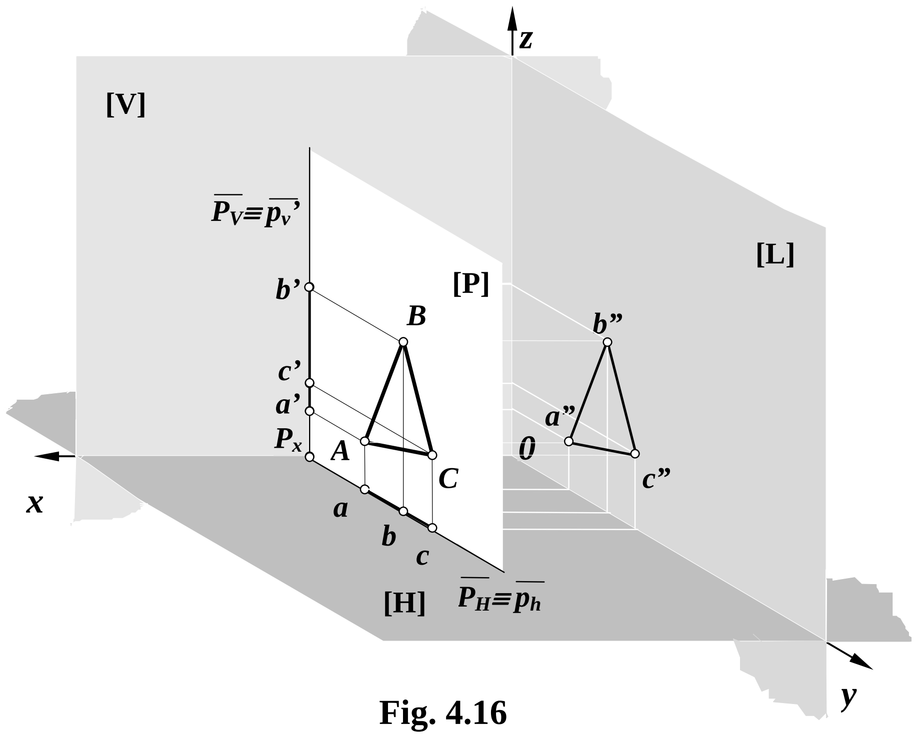


Fig. 4.16

Un element geometric aparținând unui plan de profil (segment de dreaptă, figură geometrică plană), se proiectează în adevărată mărime pe planul lateral **[L]** (fig. 4.16) şi complet deformat pe planul vertical **[V]** şi pe planul orizontal **[H]**.

Se remarcă faptul că planul de profil nu are urmă laterală (fig. 4.16 şi 4.17), iar cea verticală şi orizontală, în epură sunt în prelungire (***x=const***).

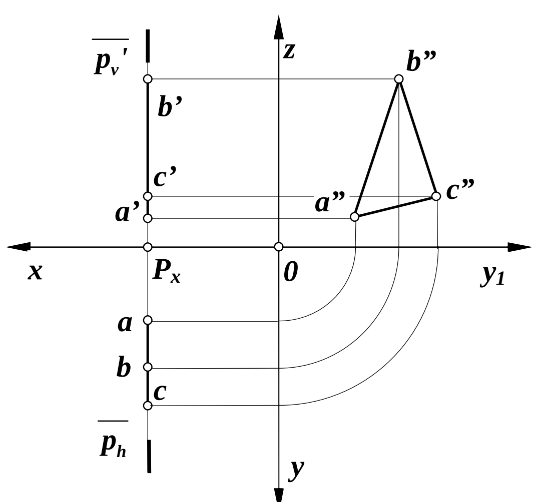


Fig. 4.17

$$\left.\begin{array}{l}[P]\,\|\,[L]\\ x=const\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\Delta a''b''c''=\Delta ABC\\ \overline{a'b'c'}\subset\overline{p_v'}\,\|\,\overline{0z}\\ \overline{abc}\subset\overline{p_l''}\,\|\,\overline{0y}\end{array}\right.\qquad(4.14)$$

4.4.4 Planul vertical [Q] este perpendicular pe planul orizontal de proiecție, față de care este deci proiectant (fig. 4.18).

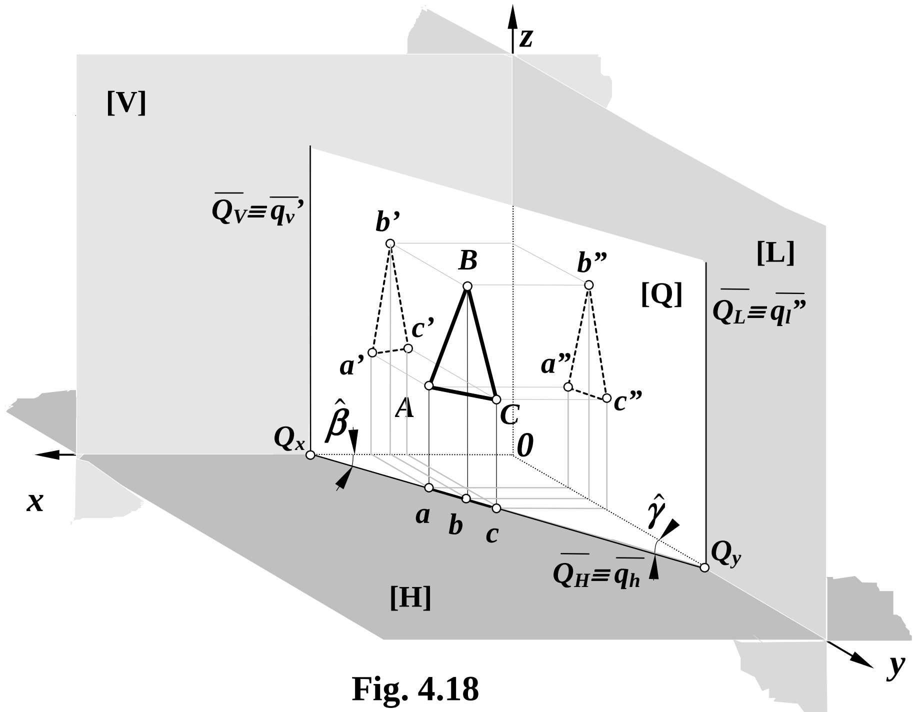
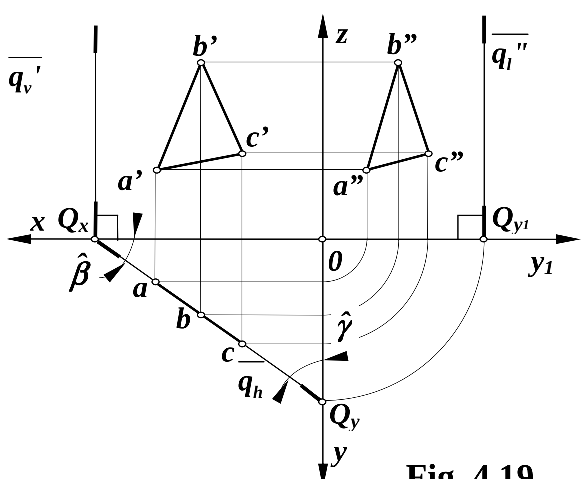


Fig. 4.18

In epură (fig. 4.19), planul vertical **[Q]** pune în evidență proprietatea sa de a fi proiectant față de planul orizontal, urma sa orizontală strângând pe ea proiecțiile orizontale ale tuturor elementelor conținute de plan (puncte, drepte sau segmente de dreaptă, figuri geometrice plane).



$$\begin{cases} \Delta abc \in \overline{q_h} \\ \overline{q_v'} \perp \overline{0x} \\ \overline{q_l''} \perp \overline{0y_1} \\ \hat{\beta} \equiv \angle\{[Q];[V]\} \\ \hat{\gamma} \equiv \angle\{[Q];[L]\} \end{cases} \qquad (4.15)$$

Fig. 4.19

De asemeni, urma orizontală $\overline{q_h}$ formează cu axele $\overline{0x}$ şi $\overline{0y}$, aceleaşi unghiuri pe care planul vertical **[Q]** le face cu **[V]** şi **[L]**. Urmele $\overline{q_v'}$ şi $\overline{q_l''}$ pun în evidență perpendicularitatea planului **[Q]** față de planul **[H]**.

4.4.5 Planul de capăt [R] este perpendicular pe planul vertical de proiecție, față de care este deci proiectant.

Spațial (fig. 4.20) şi în epură (fig. 4.21), planul de capăt **[R]** pune în evidență proprietatea sa de a fi proiectant față de planul vertical, urma sa verticală strângând pe ea proiecțiile verticale ale tuturor elementelor conținute de plan (puncte, drepte sau segmente, figuri geometrice plane).

Urma verticală $\overline{r_v'}$ formează cu axele $\overline{0x}$ şi $\overline{0z}$, aceleaşi unghiuri pe care planul de capăt **[R]** le face cu planul orizontal de proiecție **[H]** şi cu planul lateral de proiecție **[L]**. Urmele $\overline{r_h}$ şi $\overline{r_l''}$ pun în evidență perpendicularitatea planului de capăt **[R]** față de planul vertical de proiecție **[V]**.

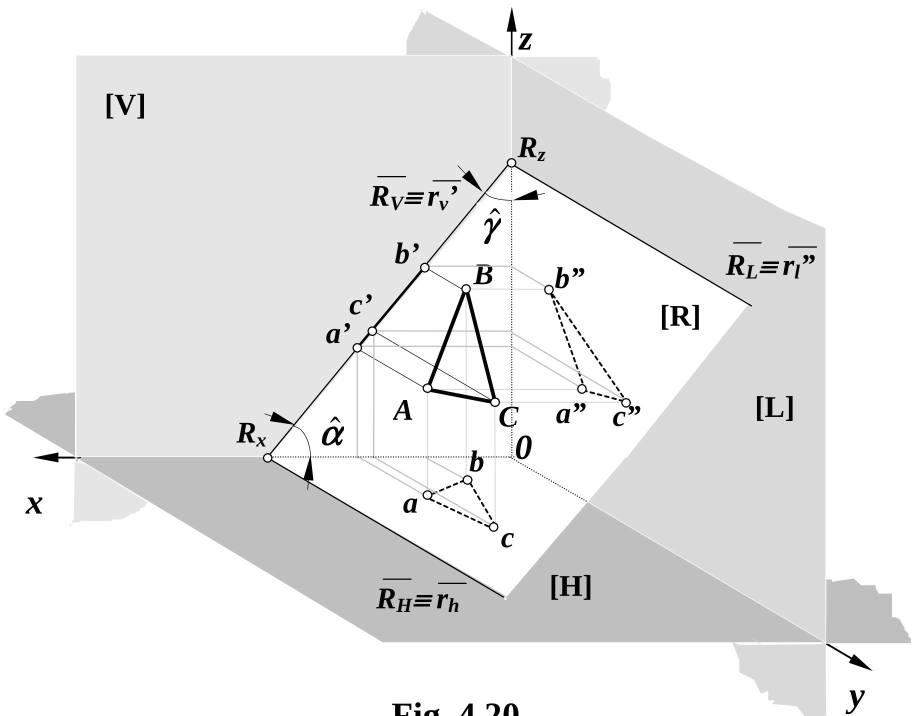


Fig. 4.20

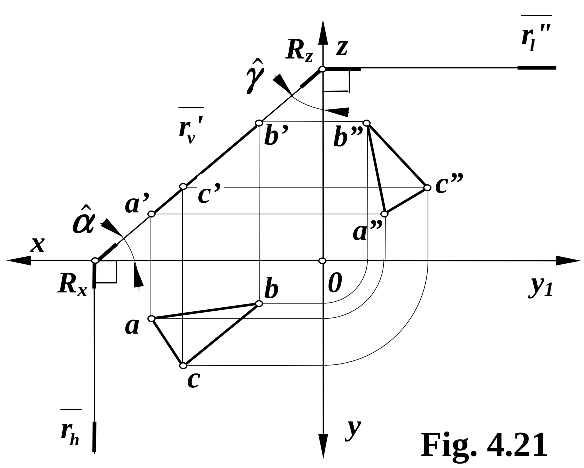


Fig. 4.21

$$\begin{cases} \Delta a'b'c' \in \overline{r_v'} \\ \overline{r_h} \perp \overline{0x} \\ \overline{r_l''} \perp \overline{0z} \\ \hat{\alpha} \equiv \angle\{[R];[H]\} \\ \hat{\gamma} \equiv \angle\{[R];[L]\} \end{cases} \qquad (4.16)$$

4.4.6 Planul paralel cu axa $\overline{0x}$,- [S] este perpendicular pe planul lateral de proiecție, față de care este deci proiectant.

Spațial (fig. 4.22) şi în epură (fig. 4.23), planul **[S]** pune în evidență proprietatea sa de a fi proiectant față de planul lateral, urma sa laterală strângând pe ea proiecțiile laterale ale tuturor elementelor conținute de plan (puncte, drepte sau segmente de dreaptă, figuri geometrice plane). De asemeni, urma laterală $\overline{s_l''}$ formează cu axele $\overline{0z}$ şi $\overline{0y_1}$, aceleaşi unghiuri pe care planul **[S]** le face cu **[V]** şi **[H]**. Urmele $\overline{s_v'}$ şi $\overline{s_h}$ pun în evidență perpendicularitatea planului **[S]** față de planul **[L]**.

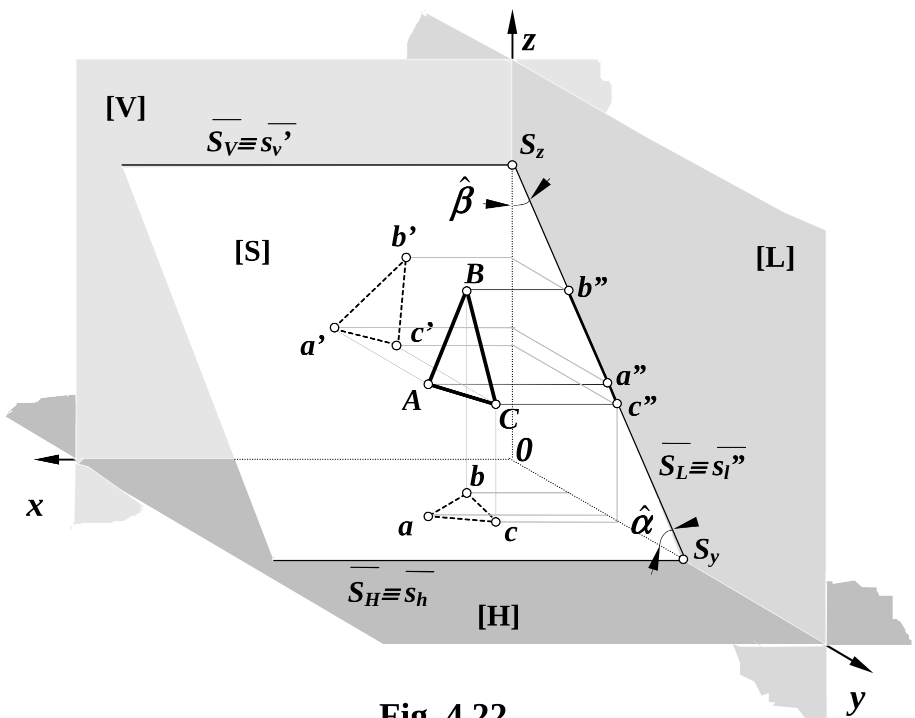


Fig. 4.22

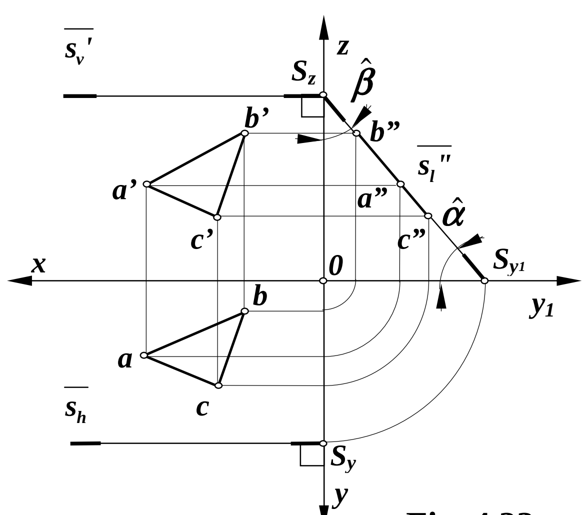
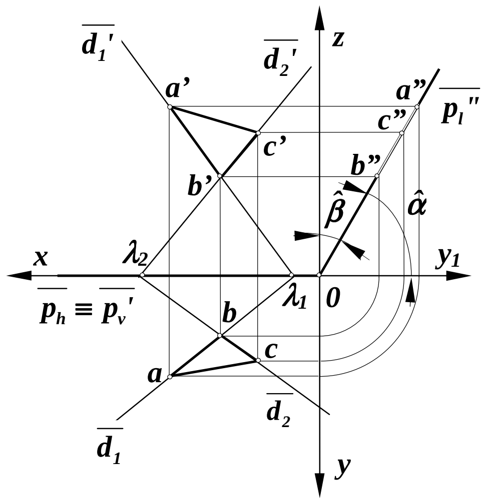


Fig. 4.23

$$\begin{cases} \Delta a''b''c'' \in \overline{s_l''} \\ \overline{s_v'} \perp \overline{0z} \\ \overline{s_h} \perp \overline{0y} \\ \hat{\beta} \equiv \angle\{[S];[V]\} \\ \hat{\alpha} \equiv \angle\{[S];[H]\} \end{cases} \tag{4.17}$$

4.4.6.1 Planul ce conține axa $\overline{0x}$, sau planul axial [P], este un caz particular de plan perpendicular pe planul lateral de proiecție. Urma sa orizontală şi verticală (fig. 4.24) se vor confunda, fiind suprapuse pe axa $\overline{0x}$, pe care o conțin, iar urma laterală, cum este de aşteptat, formează cu axele $\overline{0y_1}$ şi $\overline{0z}$, aceleaşi unghiuri pe care planul axial le face cu **[H]**, respectiv cu **[V]**.



Se poate observă că originea $0 \equiv P_y \equiv P_z$, iar dreptele situate în planul axial au urma orizontală şi verticală identice, în timp ce proiecțiile laterale ale acestor urme se concentrează toate în origine:

$$\begin{cases} \lambda_1 \equiv h_1 \equiv h_1' \equiv v_1 \equiv v_1' \\ \lambda_2 \equiv h_2 \equiv h_2' \equiv v_2 \equiv v_2' \\ 0 \equiv h_1'' \equiv h_2'' \equiv v_1'' \equiv v_2'' \end{cases} \qquad (4.18)$$

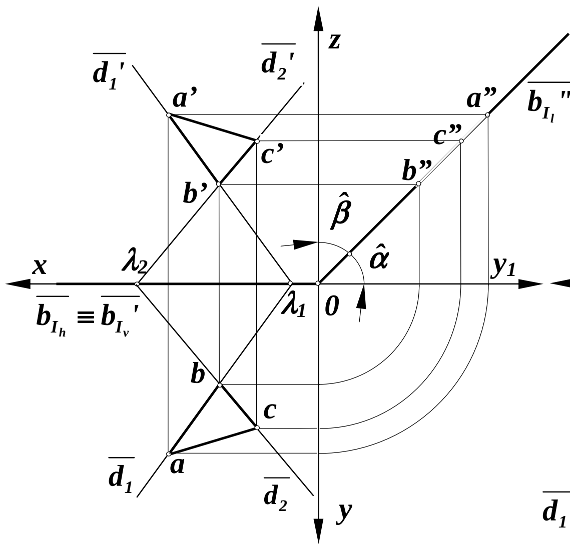
Fig. 4.24

Din categoria planelor axiale fac parte planele bisectoare, definite în capitolul **2**. În cazul planului bisector [$\mathbf{B_{I\text{-}III}}$], unghiurile $\hat{\alpha}$ şi $\hat{\beta}$ sunt egale cu 45^o, în diedrul **DI** şi **DIII**, iar în cazul bisector [$\mathbf{B_{II\text{-}IV}}$], unghiurile $\hat{\alpha}$ şi $\hat{\beta}$ sunt egale cu 45^o, în diedrul **DII** şi **DIV**.

Dacă ne gândim la coordonatele punctelor ce aparțin planelor bisectoare, vor rezulta proprietăți importante pentru elementele geometrice conținute de acest tip de plane. Este interesant de observat cum arată dreptele, respectiv segmentele de dreaptă aparținând planelor bisectoare (fig. 4.25 şi 4.26). Exemplificările se raportează la semiplanele **[$\mathbf{B_I}$]** şi **[$\mathbf{B_{II}}$]**, deci punctele ***A, B, C,*** sunt situate în diedrul **DI**, respectiv ***K, M, N,*** în diedrul **DII**.

Se observă din nou, că originea $0 \equiv P_y \equiv P_z$, iar dreptele situate în planele bisectoare au urma orizontală şi verticală identice, iar proiecțiile laterale ale acestor urme se concentrează toate în origine:

$$\begin{cases} \lambda_1 \equiv h_1 \equiv h_1' \equiv v_1 \equiv v_1' \\ \lambda_2 \equiv h_2 \equiv h_2' \equiv v_2 \equiv v_2' \\ 0 \equiv h_1'' \equiv h_2'' \equiv v_1'' \equiv v_2'' \end{cases} \qquad (4.18')$$



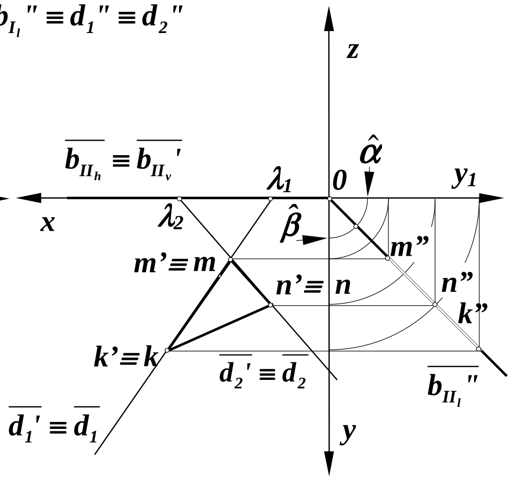


Fig. 4.25 **Fig. 4.26**

$\overline{d_1}$

Proiecțiile orizontale şi verticale ale elementelor situate în planul bisector **[B$_{I}$]** sunt simetrice față de axa $\overline{0x}$ ($\overline{d_1}$, $\overline{d_2}$, a, b, c, sunt simetrice cu $\overline{d_1'}$, $\overline{d_2'}$, a', b', c'), iar cele situate în planul bisector **[B$_{II}$]**, sunt confundate ($\overline{d_1} \equiv \overline{d_1'}$, $\overline{d_2} \equiv \overline{d_2'}$, $k \equiv k'$, $m \equiv m'$, $n \equiv n'$).

4.5 APLICAȚII

1. Se dau punctele **A(50; 15; 25), B(10; -10; 60)** şi **C(70; -15; 40).** Să se construiască urmele planului **[P]** definit de cele trei puncte.

2. Punctele **A(15; 30; -30)** şi **B(40, -10; 40)** definesc linia de cea mai mare pantă (**l.c.m.m.p.**) a planului **[Q]** față de **[H].** Să se determine urmele planului **[Q]** şi unghiul dintre acesta şi **[H]**.

3. Să se reprezinte urmele planului **[R]** definit de $\overline{HV} \equiv$ **l.c.m.m.p./ [V]** şi unghiul format de $\overline{HV}$ cu planul **[V]**. Se cunosc **H(55; -30; 0)** şi **V(30; 0; -20).**

4. Să se construiască urmele planului **[S]**, definit de dreapta de nivel $\overline{N} \supset$ **V(40; 0; 15)**$\wedge$**A(75; 25; z$_A$)** şi de punctul **B(60; -5; 35)**.